Chap 6 : Probabilités

Objectifs :

- Calculer des probabilités dans des situations simples
- Faire le lien entre la fréquence des issues et la probabilité

1. Calcul de probabilités dans des situations simples

1. Expérience aléatoire

Voc : une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est uniquement dû au hasard

ex on effectue l'expérience suivante : "on lance un dé à 6 faces". on note le nombre de points inscrits sur la face supérieure. Ce résultat est uniquement dû au hasard, donc le lancer d'un dé est une expérience aléatoire.

Rmq : chaque résultat d'une expérience ne dépend pas des résultats des expériences réalisées précédemment

ex on lance 4 fois le dé et on obtient un nombre pair à chaque lancer. Ceci ne permet pas de prévoir si l'on obtiendra un nombre pair au lancer suivant.

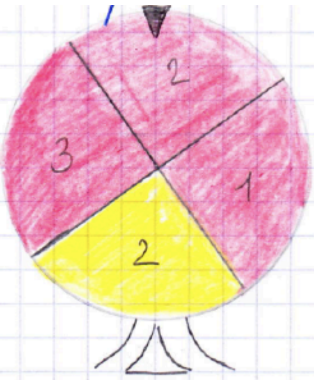
Voc : Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est une issue de l'expérience.

L'urne ci-contre contient des boules indiscernables au toucher. On effectue l'expérience aléatoire suivante : "on tire au hasard une boule de cette urne". On note quelle est la boule tirée.
Cette expérience admet 5 issues : 1 rouge, 2 vert, 1 vert, 2 bleu, 3 rouge.

2. Evénements

Voc : un événement est une condition qui, selon l'issue de l'expérience aléatoire, est réalisée ou n'est pas réalisée.

Rmq : Un événement réalisé par aucune, par une ou par plusieurs issues de l'expérience.



On effectue l'expérience aléatoire suivante : "on fait tourner la roue de loterie ci-contre". On note le secteur désigné par la flèche une fois la roue arretée.
Cette expérience aléatoire admet 4 issues :
1 rouge, 2 rouge, 3 rouge, 2 jaune
L'événement « obtenir le nombre 4 » n'admet aucune issue
L'événement « obtenir la couleur jaune » admet 1 issue : 2 jaune
L'événement « obtenir le nombre 2 » admet 2 issues : 2 jaune et 2 rouge.

Voc : un événement élémentaire est un événement qui ne peut être réalisé que par une seule et unique issue.

L'événement « obtenir le nombre 3 » est élémentaire car il n'est réalisé que par une seule issue : 3 rouge.
L'événement « obtenir la couleur rouge » n'est pas élementaire car il est réalisé par 3 issues.

3. Probabilité

Voc : la probabilité d'un événement est un nombre qui exprime « la chance qu'a un événement de se produire ». On note $P(A)$ la probabilité de l'événement A.

Rmq :
- la probabilité est un nombre compris entre 0 et 1
- un événement dont la probabilité est nulle est un événement impossible
- un événement dont la probabilité est égale à 1 est un événement certain
- la somme des probabilités d'obtenir chaque issue est égale à 1

Voc : Pour une expérience aléatoire, lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

une urne contient 5 boules indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne.
Les boules étant indiscernables au toucher, chaque boule a la même probabilité d'être tirée.
Il s'agit donc d'une situation d'équiprobalité

Prop : Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement est égale au quotient du nombre d'issues qui réalisent l'événement par le nombre total d'issues :

$$\frac{\text{Nombre d'issues qui réalisent l'événement}}{\text{Nombre total d'issues}}$$

Pour l'expérience aléatoire de l'urne ci-dessus, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité qui admet 5 issues
donc $P(\text{rose } 1) = P(\text{vert } 2) = P(\text{vert } 1) = P(\text{bleu } 2) = P(\text{rose } 3)$
L'événement « obtenir un nombre impair » est réalisé par rose 1, vert 1 et rose 3 donc

$$P(\text{impair}) = \frac{3}{5} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{nombre d'issues qui réalisent l'événement} \\ \longleftarrow \text{nombre total d'issues} \end{array}$$

Voc : 2 événements qui ne peuvent pas se produire en même temps sont dits « incompatibles ».

On fait tourner la roue de loterie équilibrée ci-contre.
On considère les événements suivants :
A : « obtenir un nombre pair »
B : « obtenir la couleur jaune »
C : « obtenir la couleur rouge ».
Aucune issue ne permet de réaliser à la fois les événements A et B, donc les événements A et B sont incompatibles.
Par contre, l'issue « rouge 2 » réalise à la fois les événements A et C donc les événements A et C ne sont pas incompatibles.

Prop : Si 2 événements sont incompatibles
Alors la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme des probabilités de ces événements.

On considère l'exemple ci-dessus.
Puisque les événements A et B sont incompatibles, on a :

$$P(\text{obtenir pair OU jaune}) = P(\text{obtenir pair}) + P(\text{obtenir jaune})$$
$$= \frac{2}{8} + \frac{3}{8}$$
$$= \frac{5}{8}$$

Prop : L'événement contraire d'un événement A se note *non* A ou $\overline{A}$.
L'événement $\overline{A}$ est réalisé lorsque A n'est pas réalisé, on a alors :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

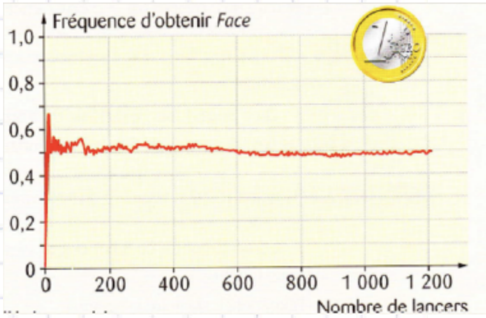
Dans le même exemple ci-dessus, l'événement contraire de l'événement A est $\overline{A}$: « ne pas obtenir un nombre pair »
c'est à dire : $\overline{A}$: « obtenir un nombre impair »
Ainsi on a

$$P(\text{obtenir impair}) = 1 - P(\text{obtenir pair})$$
$$= 1 - \frac{2}{8}$$
$$= \frac{8}{8} - \frac{2}{8}$$
$$= \frac{6}{8}$$
$$= \frac{3}{4}$$

2. Lien entre la fréquence des issues et la probabilité

Prop : Si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence à laquelle se réalise un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée probabilité de cet événement.

On lance une pièce de monnaie non truquée.
On note F l'événement « obtenir face ». Le graphique ci contre indique la fréquence à laquelle se réalise cet événement.
On remarque expérimentalement que, pour un très grand nombre de lancers, cette fréquence se rapproche de 0,5.



Ainsi, la probabilité de l'evenement F semble être égale à $P(F) = 0,5$